

**Ecuaciones polinómicas, racionales e irracionales:**

1. Resolver las ecuaciones polinómicas:

➤ Resolver mediante factorización:

a)  $x^4 + 2x^3 - 8x^2 = 0$

Primero se saca factor común (no hay término independiente)

$$x^2 \cdot (x^2 + 2x - 8) = 0$$

Igualar cada factor a 0:

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x_3 = 2, x_4 = -4$$

b)  $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

Factorizamos:

	1	-2	-11	12	
1		1	-1	-12	
	1	-1	-12	0	
4		4	12		
	1	3	0		

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x-1)(x-4)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:  $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = -3$

c)  $6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 0$

Se factoriza usando Ruffini y probando con los divisores del término independiente:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

	6	-5	-43	70	-24
2		12	14	-58	-24
	6	7	-29	12	0
-3		-18	33	-12	
	6	-11	4	0	



2. Resolver las ecuaciones racionales:

➤ Resolver haciendo el mcm de los denominadores:

$$\text{a) } \frac{x}{x+1} - \frac{16}{6} = \frac{x+1}{x}$$

Hacemos el mcm de los denominadores:

$$\frac{6x^2}{6x(x+1)} - \frac{16x(x+1)}{6x(x+1)} = \frac{6(x+1)^2}{6x(x+1)}$$

Eliminamos los denominadores y resolvemos paréntesis:

$$6x^2 - 16x^2 - 16x = 6(x^2 + 2x + 1)$$

$$6x^2 - 16x^2 - 16x = 6x^2 + 12x + 6$$

$$-16x^2 - 28x - 6 = 0 \Rightarrow 16x^2 + 28x + 6 = 0 \rightarrow 8x^2 + 14x + 3 = 0$$

(son equivalentes y tienen la misma solución)

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 96}}{16} = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{16} = \frac{-14 \pm 10}{16} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{16} = \frac{-1}{4} \\ x = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Ninguna de las soluciones hace cero el denominador, por lo que son válidas.

$$\text{Hay dos soluciones: } x_1 = \frac{-1}{4}, \quad x_2 = \frac{-3}{2}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{16}$$

Hacemos el mcm de los denominadores:

$$\frac{16x}{16x^2} + \frac{16}{16x^2} = \frac{5x^2}{16x^2}$$

Eliminamos los denominadores:

$$5x^2 - 16x - 16 = 0$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = \frac{-4}{5}$$

Ninguna de las soluciones hace cero el denominador, por lo que son válidas.

$$c) \frac{2}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{5}{4}$$

Hacemos el mcm de los denominadores:

$$\frac{8(x+1)}{4(x-1)(x+1)} + \frac{4(x-1)(x-2)}{4(x-1)(x+1)} = \frac{5(x-1)(x+1)}{4(x-1)(x+1)}$$

Eliminamos los denominadores y resolvemos paréntesis:

$$8x + 8 + 4(x^2 - 3x + 2) = 5(x^2 - 1)$$

$$8x + 8 + 4x^2 - 12x + 8 = 5x^2 - 5$$

$$0 = x^2 + 4x - 21$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -7 \end{cases}$$

Ninguna de las soluciones hace cero el denominador, por lo que son válidas.

➤ Resolver haciendo los productos cruzados:

$$d) \frac{3x-1}{5} = \frac{13}{4x+5}$$

$$12x^2 - 4x + 15x - 5 = 65$$

$$12x^2 + 11x - 70 = 0$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 3360}}{24} = \frac{-11 \pm 59}{24} \begin{cases} \frac{-70}{24} = \frac{-35}{12} \\ \frac{48}{24} = 2 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Productos cruzados iguales:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Ninguna de las soluciones hace cero el denominador, por lo que son válidas.

$$e) \frac{x-3}{2(x-1)} = -\frac{1}{x}$$

$$x(x-3) = -1 \cdot 2(x-1)$$

$$x^2 - 3x = -2x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} = 2 \quad x = \frac{-2}{2} = -1$$

Ninguna de las soluciones hace cero el denominador, por lo que son válidas.

### 3. Resolver las ecuaciones irracionales:

$$a) (\sqrt{x^2 + 5x + 1})^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Comprobación: } \sqrt{3^2 + 5 \cdot 3 + 1} = 3 + 2$$

$$b) (\sqrt{40 - x^2})^2 = (x - 4)^2 \Rightarrow 40 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 24 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Comprobación: } x = 6 \Rightarrow \sqrt{40 - 6^2} + 4 = 6 \Rightarrow \text{Sí es correcto.}$$

$$x = -2 \Rightarrow \sqrt{40 - (-2)^2} + 4 \neq -2 \Rightarrow \text{No es correcto.}$$

c)

$$\sqrt{x+5} - x = 3; \sqrt{x+5} = 3 + x; x+5 = 9 + x^2 + 6x; 0 = x^2 + 5x + 4$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = -1 \rightarrow \sqrt{4} + 1 = 2 + 1 = 3 \rightarrow x = -1 \text{ sí vale}$$

$$x = -4 \rightarrow \sqrt{1} + 4 = 1 + 4 = 5 \neq 3 \rightarrow x = -4 \text{ no vale}$$

Hay una solución:  $x = -1$