1.- Sea f : R ⟶ R la función definida como $f(x) = e^{x}.(x - 2)$.

(a) [1 punto] Calcula la asíntotas de f.

(b) [1 punto] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(c) [0'5 puntos] Determinan, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

2.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot sen(x) - x\cdot e^{x}}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

3.- Sea la función f: $(0,+\infty)$ ⟶ R definida por $f(x) = 1/x + \ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1'75 puntos] Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo [1/e, e].

(b) [0'75 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e.

4.- Sea f la función definida por $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 2$.

(a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f. (b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) [0'5 puntos] Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

5- Sea la función continua f: R ⟶ R definida por $f(x) = \begin{cases} x+k & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$ (a) [1'25 puntos] Calcula el valor de *k*.

(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa x=1.

6.- Sea la función *f* definida por $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función *f*.

(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

7.- Sea la función *f*: [1; *e*] - R definida por $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [0'75 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

(b) [1 punto] Calcula los extremos absolutos y relativos de la función *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(c) [0'75 puntos] Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad.

8.- Sea la función *f*: R ⟶ R definida por $f(x) = e^{x}(x^2 - x + 1)$

(a) [0'75 puntos] Calcula $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

(c) [0'5 puntos] Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.

9.- [2'5 puntos] Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultantes sea mínima.

10.- Sea la función *f*: R - R definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1'5 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 punto] Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = -2$.

11.- [2'5 puntos] Se considera la función derivable $f : R \to R$ definida $f(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{a}{x-2} & si \quad x<1 \\ a+\dfrac{b}{\sqrt{x}} & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

Calcula los valores de *a* y *b*.

12.- [2'5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

13.- [2'5 puntos] Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

14.- [2'5 puntos] Sea f :$[1,+\infty)$ ⟶ R la función definida como $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto A(2,0). ¿Cuál es la distancia?

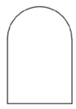
15.- [2'5 puntos] Un alambre de 100 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

16.- Sea $f : R \longrightarrow R$ la función definida por $f(x) = 4 - x^2$

(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

(b) [1'5 puntos] Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta x + 2y − 2 = 0.

17.- [2'5 puntos] Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.
De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.



18.- Sea $f : [1/e,4] \longrightarrow R$ la función definida por $f(x)= \begin{cases} x - \ln(x) + a \text{ si } 1/e <= x <= 2 \\ bx + 1 - \ln(2) \text{si} 2 < x <= 4 \end{cases}$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo (1/e,4).

(b) [1'25 puntos] Para a = 0 y b = 1/2 halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

19.- [2'5 puntos] Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

20.- Sea f la función definida por $f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3}$ para $x \neq 0$

(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

(b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

21.- [2'5 puntos] Dada la función $f : R \longrightarrow R$ definida por $f(x)= ax^3 + bx^2 +cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1,0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación y = -3x + 3.

22.- [2'5 puntos] En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

23.- [2'5 puntos] Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

24.- [2'5 puntos] En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2 + 70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión, 400x/(x − 30)
Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

25.- Sea f la función definida como $f(x) = (ax^2 + b) / (a - x)$ para $x \neq a$.

(a) [1'5 puntos] Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (2,3) y tenga una asíntota oblicua con pendiente - 4.

(b) [1 punto] Para el caso de a = 2, b = 3, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1

26.- [2'5 puntos] Calcula $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\left(e^x - e^{senx}\right)}{x^2} \right]$

27.- [2'5 puntos] La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recuerda que el volumen del cono es $V = (1/3)\,\pi\, r^2 h$).

28.- Sea f la función definida como $f(x) = x^3/(x^2 - 1)$ para $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

(a) (1 punto) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f

(b) (1 punto) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(c) (0'5 puntos) Con los datos obtenidos esboza la gráfica de f.

29.-. [2'5 puntos] Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de ser de 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

30.- Considera la función f:[0,4] ⟶ R definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si \quad 0\le x\le 2 \\ cx & si \quad 2<x\le 4 \end{cases}$

(a) (1'75 puntos) Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica f(0) = f(4), determina los valores de a, b y c.

(b) (0'75 puntos) Para a = -3, b = 4 y c = 1 halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

31.- [2'5 puntos] Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.

32.- Sea f : (0, +∞) ⟶ R la función definida por f(x) = ln(x^2 +3x), donde ln denota el logaritmo neperiano. (a) [1'5 puntos] Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación x – 2y +1 = 0.

(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x=3.

33.- [2'5 puntos] Sea la función f : R ⟶ R dada por $f(x)=\begin{cases} e^x\left(x^2+ax\right) & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$ Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1 tiene pendiente 3.

34.- [2'5 puntos] Sea f : R ⟶ R la función definidas como $f(x)=(x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$ Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = –5 y en el punto de abscisa x = 2.

35.- [2'5 puntos] Dada la función f : R ⟶ R definida como f(x) = a.sen(x)+ bx^2 + cx + d, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y que la segunda derivada de f es f'(x) = 3.sen(x) – 10.

36.- [2'5 puntos] Considera la función f : R ⟶ R definida por $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{2}{x+1} & si \quad 1\le x \end{cases}$ Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de f.

37.- [2'5 puntos] Calcula el siguiente límite (In denota logaritmo neperiano) $\lim_{x\to 1}$ [1/Ln(x) – 2/(x^2 – 1)]

38.- Sea f : R ⟶ R definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x<0 \\ x^2-3x-1 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$

(a) [0'75 puntos] Estudia su continuidad y derivabilidad.

(b) [1'25 puntos] Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

39.- [2'5 puntos] Se considera la función f: [1, +∞) ⟶ R definida por $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$ determina la asíntota de la gráfica.

40.- [2'5 puntos] De entre todos los rectángulos cuya área mide *16 cm²*, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud

41.- [2'5 puntos] Sea la función f: R⟶R definida por f(x)=ax^3+bx^2+cx+d. Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que f verifica:

El punto (0 , 1) es un punto de inflexión de la gráfica f   f tiene un mínimo local en el punto de abscisa x = 1

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene pendiente 1

42.- [2'5 puntos] Se divide un segmento de longitud L = 20 cm. en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del r rectángulo sea mínima.

43.- Sea f: R⟶R la función definida por $f(x)=x^2\cdot|x+3|$ a) [1'5 puntos] Estudia la continuidad y derivabilidad de ***f***

b) [1'5 puntos] Estudia el crecimiento y decrecimiento de ***f***. Calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

44.- Sea f: R⟶R la función definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot(\ln x)^2}{(x-1)^2} & si \ x\neq 1 \\ a & si \quad x=1 \end{cases}$ a) [1'25 puntos] Sabiendo que ***f*** es continua, calcula ***a***

b) [1'25 puntos] Estudia la existencia de asíntota horizontal para la grafica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

45.- [2'5 puntos] Se sabe que la función f: R ⟶ R definida por $f(x)=\begin{cases} -x^2+bx+1 & si \ x\le 1 \\ ax^2-5x+2a & si \ x>1 \end{cases}$, es derivable. Determina los valores de ***a*** y ***b***

46.- [2'5 puntos] Se sabe que la función f: R ⟶ R definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene extremos relativos en **(0 , 0)** y **(2 , 2).**
Calcula **a, b, c** y **d.**

47.- Sea la función definida por f: R⟶R, $f(x)= x+e^{-x}$.

a) [0'75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ***f***, así como los extremos relativos o locales de ***f***

b) [0'5 puntos] Determina los intervalos de concavidad y convexidad de ***f***

c) [0'75 puntos] Determina las asíntotas de la gráfica de ***f***.

d) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de ***f***

48.- [2'5 puntos] De todos los triángulos cuya base y altura suman **20 cm.,** ¿qué base tiene el de área máxima?

49.- [2'5 puntos] Sea *f* la función definida, para x ≠ 0, por $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

50.- [2'5 puntos] De entre todos los rectángulos de perímetro 8cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

51.- Sea f: R ⟶ R la función definida por:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
(a) [1'5 puntos] Halla a y b sabiendo que f es derivable en R.

(b) [1 punto] Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3.

52.- [2'5 puntos] De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto (1, 2), encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

53.- Sean f : R ⟶ R y g : R ⟶ R las funciones definidas por $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = ce^{-(x+1)}$ Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto (–1, 2) y tienen en ese punto la misma recta tangente.

(a) [2 puntos] Calcula los valores de a, b y c.

(b) [0'5 puntos] Halla la ecuación de dicha recta tangente.

54.- [2'5 puntos] Dada la función f : R ⟶ R definida por $f(x) = (x + 1)/(e^x)$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

55.- Sea la función f: [0, 4] ⟶ R definida por
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$
(a) [2 puntos] Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado [0, 4], derivable en el intervalo abierto (0, 4) y que f(0) = f(4).

(b) [0'5 puntos] ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

56.- Sea f : [0, 2π] ⟶R la función definida por $f(x)= e^x(\text{sen } x + \cos x)$.

(a) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) [1'25 puntos] Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

57.- Sea f : R⟶ R la función definida por
$$f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si } x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
(a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de f.

(b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f.

58-. Sea f: R ⟶ R la función definida por $f(x) = (3x - 2x^2)\, e^x$.

(a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(b) [1 punto] Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

59.- [2'5 puntos] Dada la función f definida, para x ≠ 0, por $f(x) = (e^x + 1) / (e^x - 1)$ determina las asíntotas de su gráfica.

60.- [2'5 puntos] Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

61.- [2'5 puntos] Sea f: R ⟶ R la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta y = 2x + 3

a = 26 b = 19

62.- Sea f: $(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por : $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$ (a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).

(b) [1 punto] Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

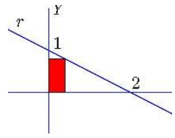
63.- [2'5 puntos] Determina una función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo).

64.- Sea f : $(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)= x^2 \,Ln(x)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).

(a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de $x = \sqrt{e}$ abscisa

65.- [2'5 puntos] De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $x/2 + y = 1$ (ver figura), determina el que tiene mayor área



66.- Sea f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x}$

(a) [1'5 puntos] Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

67.- Sea f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 3)\, e^{x}$

(a) [1 punto] Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

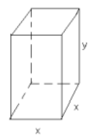
(b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

68.- Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por $f(x) = (x^2 + 3)/(x^2 - 4)$.

(a) [1 punto] Determina las asíntotas de la gráfica de f. (b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan). (c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

69.- [2'5 puntos] Determina la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = x^2 - 1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = 1$.

70.- [2'5 puntos] Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?



Función a optimizar: $x^2 + 2000/x$ Las dimensiones del depósito son $x = 10$ e $y = 5$.