

1.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,
$$\begin{cases} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de λ .

b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

2.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$

(a) [1'5 puntos] Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

(a) [1 punto] Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

3.- [2'5 puntos] Halla la matriz X que verifica la igualdad $AXA^{-1} + B = CA^{-1}$ sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

4.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + 2y + 2z = 0 \\ \lambda x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores de λ .

b) [0'75 puntos] Determina, si existen, los valores λ para los que el sistema tiene alguna solución en la que $z \neq 0$

5.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1'5 puntos] Determina la matriz X para la que $A^t X B^{-1} = C$, (A^t la matriz traspuesta de A).

b) [1 puntos] Calcula el determinante de $B^{-1}(C^t C)B$, (C^t la matriz traspuesta de C).

6.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,
$$\begin{cases} 2x + y + (\alpha - 1)z = \alpha - 1 \\ x - \alpha y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 2\alpha - 2 \end{cases}$$

a) [1 punto] Resuelve el sistema para $\alpha = 1$.

b) [1'5 puntos] Determina, si existe, el valor de α para el que $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$ es la única solución del sistema dado.

7.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

a) [1'5 puntos] Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) [1 punto] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

8.- [2'5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Determina, si existe, la matriz X que

verifica $A \cdot X + B = A^2$

9.- Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) [1 punto] $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$. (b) [1'5 puntos] $A = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

10.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, a) [0'5 puntos] Calcula A^{-1}

b) [2 puntos] Hallar la matriz X que verifica $A^t \cdot X + B = I$, siendo I la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

11.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, $\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ mx + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2mz = 0 \end{cases}$

a) [0'75 puntos] Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

b) [1 punto] Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula.

c) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $m = -2$.

12.- Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes:

(a) [0'5 puntos] $\det(3A)$.

(b) [0'5 puntos] $\det(A^{-1})$. (c) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ (d) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+z & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

13.- Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

(b) [1 punto] Estudia el rango de M según los valores de m.

(c) [0'75 puntos] Para $m = 1$, calcula la inversa de M.

14.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1'75 puntos] Comprueba que $A^2 = 2 \cdot I$ y calcula A^{-1} . (b) [1 punto] Calcula A^{2013} y su inversa.

15.- Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) [1 punto] $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$. b) [1'5 puntos] $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

16.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- a) [1 punto] Halla, si es posible, A^{-1} y B^{-1} .
 b) [0'25 puntos] Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A .
 c) [1'25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX - B = AB$.

17.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,
$$\begin{cases} 2x - 4y + 6z = 6 \\ my + 2z = m + 1 \\ -3x + 6y - 3mz = -9 \end{cases}$$

- a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m .
 b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $m = 3$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, una solución en la que $y = 0$.

18.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

- (a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro k no existe la matriz inversa de la matriz A ? Justifica la respuesta.
 (b) [1'5 puntos] Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I de nota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A .

19.- Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ 3y + 2z = 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \end{cases}$$

- (a) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.
 (b) [1 punto] Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.
 (c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de λ para que el sistema admita la solución $(-1/2, 0, 1/2)$?

20.- [2'5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AXB = C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C .

21.- Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} kx + 2y = 3 \\ -x + 2kz = -1 \\ 3x - y - 7z = k + 1 \end{cases}$$

- (a) [1'75 puntos] Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro k .
 (b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $k = 1$.

22.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
$$\begin{cases} kx + 2y = 2 \\ 2x + ky = k \\ x - y = -1 \end{cases}$$

- (a) [0'5 puntos] Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k .
 (b) [1 punto] Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
 (c) [1 punto] Halla las soluciones en cada caso.

23.- Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas.
$$\begin{cases} x - y = \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z = \lambda \\ -x - y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

- (a) [1'25 puntos] Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ .
 (b) [1 punto] Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

24.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = 2 \\ x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

(a) [1'75 puntos] Clasifícalo según los distintos valores de k .

(b) [0'75 puntos] Resuélvelo para el caso $k = 2$.

25.- [2'5 puntos] Encuentra la matriz X que satisface la ecuación $XA + A^3B = A$, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

26.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ky + 2z = k+1 \\ x + 2y + kz = 3 \\ (k+1)x + y + z = k+2 \end{cases}$$

(a) [1'25 puntos] Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.

(b) [0'5 puntos] Existe algún valor de k para el cual el sistema no tiene solución?

(c) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $k = 0$.

27.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.

(b) [1'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

28.- Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

(a) [1'25 puntos] ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

(b) [1'25 puntos] Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

29.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ 2x + ky = 1 \\ y + 2z = k \end{cases}$$

(a) [1 punto] Clasifica el sistema según los valores del parámetro k .

(b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $k = 1$.

(c) [0'75 puntos] Resuélvelo para $k = -1$.

30.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -\lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$

(a) [1'75 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

(b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

31.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

(b) [1'25 puntos] Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.